ÁTSOROLÁSI SZABÁLYOK OPTIMALIZÁLÁSA BÓNUSZ-MÁLUSZ RENDSZEREKBEN[1]

ÁGOSTON KOLOS CSABA – GYETVAI MÁRTON

Bónusz-málusz rendszerek kockázatkezelési módszerek, amelyek leggyakoribb előfordulása a kötelező gépjármű-felelősségbiztosítás esetén figyelhető meg. Bónusz-málusz rendszerek kalibrációja jellemzően abban merül ki, hogy egy adott átsorolási szabályt feltételezve optimális díjakat határoznak meg. A cikkben bemutatunk egy vegyes egészértékű LP modellt, amely során a díjakat és az átsorolási szabályokat egyszerre tudjuk optimalizálni. A modellel ezeken túlmenően a BM kategóriák optimális számát is meghatározhatjuk.

1 Bevezetés

A bónusz-málusz (BM) rendszerek közismertek, nem csak a szűk aktuáriusi körökben, hanem a teljes társadalomban is. A bónusz-málusz rendszer talán az egyik legismertebb kockázatkezelési módszer, amelyben a biztosítottakat több kategóriába osztják; a jobb kategóriákban kisebb díjat kell fizetni, a rosszabbakban pedig többet. Ha valaki kárt (vagy károkat) okoz, a következő időszakban rosszabb BM besorolást kap, tehát magasabb díjat fizet, és vica versa: aki nem okoz kárt, az jobb besorolást kap és kisebb díjat fizet. Azt, hogy a biztosított egyén mennyivel jobb vagy rosszabb besorolást kap kármentes esetben, illetve kárt okozva, azt az ún. átsorolási szabályok határozzák meg. A BM rendszer célja, hogy mindenki a kockázatának megfelelő díjat fizesse, vagy ha ez nem lehetséges, akkor azt minél jobban megközelítsük.

A BM rendszereknek széles irodalma van mind közgazdasági, mind matematikai területen (lásd például Cooper és Hayes (1987), Lemaire (1995), Denuit et al. (2007)). Ezekben a munkákban az átsorolási szabályokat rendszerint rögzítettnek tekintik, és a BM kategóriák díjait szeretnék meghatározni úgy, hogy az ideálisnak tekintett állapotot minél jobban megközelítsék. Az átsorolási szabályok optimalizálására azonban kevesebb figyelem jut.

BM rendszerek hatékonyságát rendszerint az ún. rugalmassággal (vagy az angol kifejezés után elaszticitással) mérik. Az elaszticitás megmutatja, hogy ha 1%-kal növekszik a kockázat, akkor hány százalékkal változik a várható díjfizetés. Nyilván jogos elvárás, hogy a magasabb kockázatú egyének magasabb díjat fizessenek, de érdemes azt a szempontot is figyelembe venni, hogy a biztosított alapvetően kockázatkerülő, tehát adott esetben megelégedne egy magasabb várható díjfizetéssel, feltéve, hogy a díj ingadozása érezhetően

[1] Beérkezett 2018. november 29. E-mail: `kolos.agoston@uni-corvinus.hu`.

kisebb. A rugalmassági paraméter számításánál nem jelenik meg a fizetett díj változékonysága, csak a várható díjbevételre koncentrál.

Ebben a cikkben a magyar BM rendszert elemezzük. Az elemzés során nemcsak a BM kategóriák díjait vesszük figyelembe, hanem az átsorolási szabályokat is. Célunk olyan módszertani keret meghatározása, ami a biztosított kockázatkerülését is figyelembe veszi, nem csak a várható díjbevételt. A cikk során megadunk egy vegyes egészértékű programozási (angolul mixed integer linear programming, MILP) feladatot, amivel mind a két kitűzött célt meg tudtuk valósítani.

A felépített modell érdekes mind az elmélet, mind a gyakorlati alkalmazás oldaláról. Elméleti oldalról tudjuk, hogy az antiszelekció jóléti veszteséget okoz, ami csökkenthető BM rendszerek alkalmazásával. A csökkentés tényleges mértékét gyakorlati problémák esetén lehet tanulmányozni.

Gyakorlati alkalmazás szempontjából elmondható, hogy a modell közvetlenül alkalmazható pl. casco biztosítások esetén. A BM rendszer legismertebb példája a KGFB rendszer. Magyarországon az átsorolási szabályok központilag vannak meghatározva, a biztosítók a díjképzés folyamán alkalmazkodnak ezekhez a szabályokhoz. Az átsorolási szabályok központi meghatározása nem teszi értelmetlenné a modellt: ha ,,rosszak" (nem elég hatékonyak) a központilag meghatározott átsorolási szabályok, akkor ehhez a ,,rossz" rendszerhez fognak alkalmazkodni a biztosítók.

A cikk felépítése: a második fejezetben bemutatjuk a BM rendszer elemzésének elméleti keretét, majd a harmadik fejezetben ismertetjük a magyar KGFB rendszert és megadunk pár külföldi példát is. A negyedik fejezetben definiálunk egy vegyes egészértékű lineáris programozási modellt az átsorolási szabályok és a díjak együttes optimalizálására. Az ötödik a fejezetben néhány numerikus példa eredményeit ismertetjük, és egy realisztikus modell eredményeit is bemutatjuk. A hatodik fejezetben pedig összefoglaljuk az eredményeinket.

2 Szakirodalmi áttekintés

A BM rendszereknek széles irodalma van mind közgazdasági, mind matematikai területen. Közgazdasági oldalról lényeges vizsgálódási terület volt a nem homogén kockázatok vizsgálata. Biztosíthatóság szempontjából lényeges, hogy ne egyedi kockázatokat tekintsünk, hanem több kockázat együttesét. Ha több kockázatot együtt kezelünk, óhatatlan, hogy kockázatközösségben megjelenjen valamiféle heterogenitás. Meg lehet próbálni megfigyelhető változók (tulajdonos életkora, gyermekeinek száma vagy például a gépjármű motorjának hengerűrtartalma) szerint csoportokra osztani a kockázatközösséget, ezt hívja a szakirodalom kockázati csoportokba sorolásnak (angolul risk classification, lásd pl. Crocker és Snow (1986), Crocker és Snow (2000)).

A kockázati csoportokba sorolás az egyik leginkább alkalmazott technika a biztosítási területen, de a kockázati csoport heterogenitása nem szüntethető meg teljesen ezzel a módszerrel. Akárhány változó szerint is hozunk létre csoportokat, azt tapasztaljuk, hogy egy adott csoporton belül még mindig többféle kockázatú biztosított keveredik, ezeket a biztosítottakat a mérhető tulajdonságaik alapján vagy nem tudjuk megkülönböztetni, vagy csak nagyon nagy költséggel. Ezt a jelenséget hívja a közgazdasági irodalom antiszelekciónak. A jelenséget biztosítási piacon elsőként Rothschild és Stiglitz (1976) írta le és elemezte. A cikkben megállapítják, hogy az antiszelekció jelensége jóléti veszteséget okoz a társadalomban, ráadásul a piaci egyensúly nem is mindig létezik. Az antiszelekció okozta jóléti veszteség bizonyos módszerekkel mérsékelhető. Cooper és Hayes (1987) többperiódusú szerződéseket vizsgált, és megállapítja, hogy ha a díjszámításnál figyelembe vesszük az előző évek kártörténetét – vagyis akinek több vagy nagyobb kára volt, az a következő évben magasabb díjat fizet – akkor az antiszelekció okozta jóléti veszteség mérsékelhető. Nem nehéz ebben egy kezdetleges BM rendszert látnunk. De fontos hangsúlyozni, hogy az elméleti eredmény szerint nem minden biztosított esetén érdemes figyelembe venni a kártörténetet, és különböző kockázatú biztosítottakra különböző díjakat (= különböző BM rendszert) érdemes alkalmazni. Nyilván ez nehezen kivitelezhető a gyakorlatban. Az antiszelekcióból adódó jóléti veszteség csökkentésének másik lehetséges módja a kötelező biztosítás előírása. Érdekes módon a kötelező gépjármű-felelősségbiztosítás (KGFB) esetén ez a két mód (kötelező biztosítás és kártörténet figyelembe vétele) egyszerre jelenik meg.

Az antiszelekció kérdéskörét empirikusan is vizsgálták, amely során ellentmondó eredmények születtek. Dahlby (1983) és Puelz és Snow (1994) antiszelekció megléte mellett érvel, míg Chiappori és Salanié (2000) ellene.

A BM rendszerek kapcsán érdemes még szót ejtenünk a morális kockázat jelenségéről. Morális kockázat modellje esetén a kárbekövetkezési valószínűségek (vagy azok nagysága) nem függetlenek a biztosított viselkedésétől, tehát az erőfeszítésének mértékétől függ. Az erőfeszítés mértékét a biztosító nem tudja megfigyelni, csak a kár nagyságából tud (jó vagy rossz) következtetéseket levonni (lásd pl. Shavell (1979)). BM rendszerek esetén a morális kockázat is kontrollálható, hiszen ha a biztosított kisebb erőfeszítést tesz a kár elkerülésére, a következő évben rosszabb BM osztályba kerül és nagyobb díjat kell fizetnie (bár Vanderbroek (1993) amellett érvel, hogy az önrész nagyobb hatékonyságú a morális kockázat kezelésében, mint a BM rendszer; a témában lásd még Holton (2001)). Morális kockázat meglétét empirikusan is ki tudták mutatni több országban is: Lee és Kim (2016) a koreai BM rendszert elemezte, Dionne et al. (2013) a franciát, Vukina és Nestić (2015) a horvátot, Abbring et al. (2008) pedig a hollandot.

Morális kockázat egy tipikus megjelenési formája az ún. bónuszéhség, ami azt jelenti, hogy ha valaki kis méretű kárt okoz, akkor érdemes lehet a kár kifizetését bevállalnia, mert a romló BM besoroláson adott esetben többet veszít, mint a kár tényleges nagysága (De Prill (1979), Sundt (1989)).

Az antiszelekció és morális kockázat nagyon sokszor összefonódik (mint pl. a BM rendszerben is egyszerre jelentkezik), nehéz őket szétválasztani. Az utóbbi időben az ún. „contract theory” tanulmányozza ezeket a területeket (lásd pl. Bolton és Dewatripont (2005)).

A BM rendszerek matematikai tárgyalásának egyik első feltűnése Molnar és Rockwell (1966). Ebben a munkában már feltűnik a BM rendszerek Markov-folyamattal való leírásának lehetősége. Loimaranta (1972) a BM rendszer aszimptotikáját vizsgálta. Loimaranta (1972) megad egy módszert a BM rendszerek hatékonyságának vizsgálatára (szokás Loimaranta-hatékonyságnak is nevezni), ami tulajdonképpen egy rugalmassági együttható. Optimális rendszer esetén a mutató értéke 1, azaz ha 1%-kal növekszik a kockázat, 1%-kal növekszik a díj is.

Lemaire (1995) empirikusan vizsgált számos európai és nem európai BM rendszert, és megállapítja, hogy ha BM kategóriák díjainak változékonyságára értelmes korlátokat szabunk meg, akkor a hatékonysági mérték 1 alatt van. Kiss D. (2016) szakdolgozatában a magyar BM rendszert elemezte, és hasonló következtetésre jutott.

De Prill (1978) a Loimaranta-hatékonyságot általánosította. Loimaranta (1972) bevezette a központi érték fogalmát is (angolul central value). A központi érték a biztosított kockázatát leíró paraméter olyan értéke, amely esetén a várható kárfizetés és a várható díjfizetés megegyezik. Loimaranta (1972) még egy fontos hozzájárulást tesz a BM rendszerek tanulmányozásához. Az általa bevezetett hasznosság mutató nem teljesen kielégítő, mert bár matematikailag könnyen megvalósítható, de csak azon az áron, hogy a BM kategóriák díjai nagymértékben különböznek egymástól, amivel (szerinte) igazából a biztosítás eredeti értelme veszik el.

A közgazdasági irodalom ezt úgy fogalmazza meg, hogy egy kockázatkerülő döntéshozó (biztosított) nem csak a díjak várható értékét veszi számításba, hanem azok ingadozását is. Egy kockázatkerülő döntéshozó megelégszik egy nagyobb várható értékű díjjal is, ha annak az ingadozása jelentősen kisebb. Loimaranta (1972) ezért megad egy olyan díjvektort is, ami adott hatékonyság mellett a legkisebb varianciával rendelkezik.

A matematikai irodalomban nagy hangsúlyt kap adott feltételezések melletti optimális díjak meghatározása (teljesség igénye nélkül pl. Brouhns et al. (2003), Denuit és Dhaene (2001), Lemaire (1995), Mert és Saykan (2005), Najafabadi és Sakizadeh (2017)). Közös jellemzőjük az ezekben a cikkekben bemutatott modelleknek, hogy az átsorolási szabályokat adottnak tekintik, és ezen feltételezés mellett a BM osztályok díjai a döntési változók. Szintén közös a modellekben, hogy a biztosítottat nem hasznosságfüggvénnyel reprezentálják. Ritka kivétel ebben a tekintetben Lemaire (1995), ahol előfordul olyan modell is, ahol a biztosítottat exponenciális hasznosságfüggvénnyel modellezi.

Modellünk másik forrása a készpénz-optimalizálási modellek, ahol a Markov-lánc szintén feltűnik (lásd pl. Ghellinck és Eppen (1967) és Eppen és Fama (1968)). Ezekben a modellekben a készpénz felvételeket és leadásokat szeretnék meghatározni, ami a mi olvasatunkban az átsorolási szabályok optimalizálása. A BM rendszerekre felírt modell esetén lényeges különbség, hogy a szabályok bizonyos korlátok között adottak, ezért egészértékű modellre kell áttérni.

Gyetvai és Ágoston (2018) bemutat egy vegyes egészértékű modellt az átsorolási szabály optimalizálására rögzített díjvektor mellett. Jelen cikkben a modellt kiegészítettük úgy, hogy ne csak az átsorolási szabályt optimalizáljuk, hanem egyazon modell keretében a díjvektort is. További kiegészítés, hogy a modellben lehetőség van a BM rendszer méretének változtatására is, bizonyos BM osztályokat akár meg is szüntethetünk.

3 Bónusz-málusz rendszerek

3.1 Magyar KGFB rendszer

Magyarországon 1982-ben vezettek be (25/1982. (IV. 9.) PM rendelet) egy világon egyedi értékelési rendszert a kötelező gépjármű-felelősségbiztosításra, ahol a biztosítás díját a benzin árába építették bele. A gáz- és gázolajüzemű járművek esetén pedig külön kellett a biztosítási díjat befizetni.

Az ilyen típusú benzináras biztosítás jobban kezelte az adóformájú biztosításnál azt a jelenséget, hogy aki gyakrabban vezeti a gépjárművét, az lényegében magasabb kockázatot jelent. Azonban nem tudta kezelni a morális kockázatot, illetve nem vette figyelembe a biztosítottak gyakorlottságát. Általában a BM rendszerek esetében a kezdő belépők magasabb díjjal kezdenek, majd fokozatosan csökken a díjuk, ahogy egyre gyakorlottabbak lesznek (amennyiben kármentesen vezetnek). A benzináras rendszerben a magasabb gyakorlottság nem jelentette a fizetendő díj csökkenését, aki többet használta a gépjárművét, az többet fizetett. Részben ezen problémák miatt cserélték le 1991-ben a benzináras rendszert a ma is használt bónusz-málusz rendszerre (58/1991. (IV. 13.) Korm. rendelet).

Ebben a KGFB BM rendszerben 15 kategória van, *B1, ..., B10* a bónusz osztályok, *A0* a kezdőosztály, és *M1, ..., M4* jelölik a málusz osztályokat. A legmagasabb diszkontú a *B10*, a legalacsonyabb pedig az *M4*. Kármentes esetben a biztosítottak egy osztályt javítanak, illetve két osztályt rontanak a biztosítottak minden egyes okozott kár esetén. Amennyiben 4 vagy annál több kárt okoztak az időszak alatt, akkor az *M4*-es osztályba kerülnek a szerződők.

A károkozónak lehetősége van az okozott kárt a biztosítónak megtéríteni, ekkor a besorolásában az adott kárt nem veszik figyelembe. Amennyiben a szerződő hamis adatot közöl a jobb besorolás érdekében, akkor a biztosított az *M4*-es osztályba kerül.

A bónusz-málusz besorolás személyhez kötött, tehát adásvétel esetén a megszerzett osztály nem kerül át az új tulajdonoshoz, viszont a régi tulajdonos az új autóra átvezetheti a BM besorolást. Ha a tulajdonos biztosítót vált, szintén megőrzi a BM besorolást, kivéve abban az esetben, ha a szerződés díjnemfizetés miatt szűnt meg. Ha egy biztosítottnak több gépjárműve van, akkor párhuzamosan nem használhatja ugyanazt az értékelést, a két gépjárműre külön besorolás vonatkozik.

3.2 Egyéb európai rendszerek

Lemaire (1995) könyvében számos európai BM rendszert hasonlított össze. Azóta számos országban a központi hatóság által meghatározott rendszereket eltörölték, a biztosítók szabadon megválaszthatják az értékelési rendszerüket. Ilyen országok például Belgium, Egyesült Királyság, Norvégia, Spanyolország, Svédország és Finnország.

Több esetben ezekben az országokban is a biztosítók jelentős része megmaradt a korábban használt értékelési rendszernél, legfeljebb azon csak alig változtattak (pl. Finnország, vagy Hollandia). Más országokban a meglévő BM rendszerek eltérő paraméterekkel rendelkeznek, azaz nem kompatibilisek egymással (pl. Belgium esetében).

Néhány országban, Magyarországhoz hasonlóan, a bónusz-málusz rendszer paraméterei rögzítettek maradtak a központi hatóság által, viszont előfordul, hogy a rendszer néhány paraméterében változtathatnak csak a biztosítók (lásd Németország esetét).

Az *1. táblázatban* néhány olyan BM rendszer adatait adjuk meg, ahol az adott országban a központi hatóság határozza meg a rendszer paramétereit, vagy pedig olyan BM rendszereket használnak a biztosítók, amelyek nagyjából megegyeznek.

Az első oszlopban az osztályok száma látható, a másodikban a kezdő osztály sorszáma, abban az esetben, ha 0-val a legmagasabb díjú osztályt számozzuk. Az ezt követő oszlopokban pedig a különböző m kárszámok esetén az átsorolási szabályok láthatóak. Ebben az esetben pozitív előjel az osztályjavítást, míg negatív a rontást jelenti.

Ország	K	b	m0	m1
Ausztria	18	8	+1	-3
Finnország	17	4	+1	-3
Hollandia[1]	20/21	6	+1	-5/-4
Horvátország	12	8	+1	-3
Luxemburg	26	11	+1	-3
Magyarország	15	4	+1	-2
Németország[2]	39	1/3	+1	
Olaszország	18	4	+1	-2
Svájc	18	9	+1	-4
Svédország[3]	7	0	+1	-2

1. táblázat. Átsorolási szabályok európai BM rendszerekben. K: BM osztályok száma, b: kezdő osztály sorszáma, m0/m1: 0/1 kárszám esetén a besorolás változásának mértéke. *Forrás:* Saját internetes gyűjtés.

Megjegyzések:

1: Hollandiában szabadon választható a BM rendszer, viszont több biztosító hasonló besorolási szabályt használ. Az osztályok száma gyakran 20 vagy 21, a kár okozása esetén a rontás néhol 5, máshol pedig 4.

2: Németországban két belépő osztály van, az egyikbe az új jogosítvánnyal rendelkezők kerülnek, egy alacsonyabb díjúba pedig azok a belépők, akiknek legalább 3 éve van jogosítványuk. A kár esetén csökkentést a biztosítók szabadon megválaszthatják.

3: A svéd rendszerben a legalacsonyabb díjú osztályba csak 6 kármentes év után lehet kerülni.

Ahogy a táblázatban is látható, az európai BM rendszerek szabályai meglehetősen eltérőek lehetnek. Azonban minden esetben a kármentesség egy BM osztály javulást eredményez, és kár okozása esetén a büntetés pedig legalább 2 osztály rontást jelent.

4 Egészértékű programozási feladat

Ebben a fejezetben bemutatunk egy egészértékű programozási feladatot, amivel BM rendszerek esetén meg lehet határozni az optimális átsorolási szabályt és díjvektort. Az egészértékű feladat során Heras et al. (2004) modelljét általánosítjuk, elfogadva az elemzési keretüket: a BM rendszerben meglévő antiszelekcióra koncentrálunk, a morális kockázatot figyelmen kívül hagyjuk. A modellben feltételezzük, hogy a különböző csoportok esetén csak a károk száma (kárbekövetkezési valószínűség) különbözik, a károk nagysága nem. Tehát az átsorolási szabály csak a károk számától függ, az okozott kár nagyságától nem. Külső szemlélőnek furcsa lehet, hogy két kisebb kárt jobban büntet a rendszer, mint egy nagy kárt, de ha azt feltételezzük, hogy a kockázati csoportok esetén a kárnagyság feltételes eloszlása megegyezik, nem érdemes a díjat ettől függővé tenni. Másrészről a fellelhető BM rendszerek döntő többségére igaz, ahogy az átsorolási szabály az okozott károk számától függ, és nem azok mértékétől (lásd 1. táblázat).

4.1 Alapfogalmak

A kockázatközösségen belül I különböző kockázati csoport (típus) van ($i = 1, \dots, I$). Az egyes típusok esetén Λ^i valószínűségi változó jelöli a káresemények számát. A várható kárnagyság az egyszerűség kedvéért minden csoportra és minden kárszámra egységnyi, de újabb paraméterek hozzáadásával, minimális átalakítással kezelhető lenne a modellen belül a várható kárnagyságok heterogenitása is. A csoportok létezéséről és különbözőségéről tud a biztosító, de nem tudja a kockázatközösség tagjairól, hogy melyik csoporthoz tartoznak. Társadalmilag az lenne optimális, ha minden típus a kockázatának megfelelő díjat fizetné, de ez általában nem lehetséges. A BM rendszerek alkalmazása esetén a várható díjfizetést közelebb lehet hozni a tényleges kockázathoz.

A BM rendszerben $K+1$ különböző BM osztály található; 0 jelöli a legmagasabb díjú osztályt, K pedig a legalacsonyabbat. A k-adik BM osztályban a díj π_k ($k = 0, \dots, K$). Az osztályok közötti átsorolás a káresemények számától függ, minél több kára volt a biztosítottnak, annál rosszabb BM osztályba kerül a következő évben. Az átsorolási szabály esetén maximum M káreseményt tekintünk, másképpen fogalmazva M index esetén a károk száma M vagy több. Az i-edik csoport esetén λ^i_m a valószínűsége annak, hogy a biztosított m kárt okoz ($m = 0$ esetén nincs okozott kár). Természetesen fennáll a $\sum_{m=0}^{M} \lambda^i_m = 1$ összefüggés. A λ^i_m értékeket külső paraméternek tekintjük; ezen paraméterek becsléséhez lásd pl. Arató és Martinek (2014).

A károk várható számát (átlagos kárszámot) λ^i jelöli az i csoport esetén, a csoport arányát a kockázatközösségen belül pedig ψ^i.

Adott egy átsorolási szabály, ezeket az átsorolási szabályokat a T^m bináris mátrixok adják meg. Amennyiben a mátrix (k_1, k_2) cellájában 1 érték szerepel, tehát $T^m_{k_1,k_2} = 1$, akkor a jelenlegi időszakban a k_1 BM osztályban lévő biztosítottak m kár esetén a k_2 osztályba kerülnek a következő periódusban.

Jelölje X^i_t a BM rendszerben egy i típusú biztosított osztálybesorolását a t-edik időpontban, amelyet értelmezhetünk úgy, mint egy diszkrét időszakokban értelmezett sztochasztikus folyamat.

Egy X_t diszkrét időszakokban értelmezett sztochasztikus folyamatot akkor nevezünk Markov-láncnak, ha minden t időszakra igaz, hogy:

$$\mathbf{P}(X_{t+1} = k_{t+1} \mid X_t = k_t, X_{t-1} = k_{t-1}, \ldots, X_1 = k_1, X_0 = k_0) = \\ = \mathbf{P}(X_{t+1} = k_{t+1} \mid X_t = k_t)\,.$$

A BM rendszerben a következő időszak osztálybesorolása az adott időszak kárszámától és a jelenlegi besorolástól függ. Mivel feltesszük, hogy az átsorolási szabály és a károk eloszlását leíró valószínűségi változó (Λ^i) időben állandó, ezért a következő időszak besorolási valószínűségének a meghatározásához elegendő, ha csak a jelenlegi időszak besorolását vesszük figyelembe, a korábbi időszakokét nem. Másképpen fogalmazva, a biztosított besorolása a BM rendszerben Markov-lánc.

A vizsgált X^i_t folyamat esetén az átmenetvalószínűségek mátrixát (P^i) meghatározhatjuk a Λ^i valószínűségi változó, valamint az átsorolásokat leíró T^m mátrixok segítségével. A P^i mátrix k_1 sorában és k_2 oszlopában szereplő értéke megadja azt a valószínűséget, hogy egy adott időszakban (évben) a k_1 BM osztályban lévő i típusú biztosított mekkora valószínűséggel kerül a k_2 osztályba a következő időszakban:

$$\mathbf{P}(X^i_{t+1} = k_2 \mid X^i_t = k_1) = \sum_{m=0}^{M} \lambda^i_m T^m_{k_1,k_2} \tag{1}$$

Jelölje $c^i_{k,t}$ azt a valószínűséget, hogy X^i_t folyamat értéke a t-edik időszakban éppen k, tehát $\mathbf{P}(X^i_t = k) = c^i_{k,t}$. Ezeket a valószínűségeket a C^i_t vektorokba rendezzük. Ekkor igaz lesz a

$$C^{i\top}_t = C^{i\top}_0 (P^i)^t \tag{2}$$

összefüggés is (a $(P^i)^t$ kifejezés esetén a zárójelen kívüli index hatványozást jelöl, a felső indexben található $\top$ pedig a transzponálás jele).

Amennyiben egy Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor a C^i_t állapotvalószínűségek vektora konvergál egy ún. stacionárius állapothoz. A stacionárius állapot megkapható a P^i mátrix bal oldali 1 sajátértékéhez tartozó (1-re normált) sajátvektora segítségével. Irreducibilis és aperiodikus Markov-lánc esetén egyetlen ilyen sajátvektor létezik, amely megkapható a

$$c^i_k = \sum_{j=0}^{K} \mathbf{P}(X^i_{t+1} = k \mid X^i_t = j) c^i_j \qquad k = 0, \ldots K \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{K} c_k^i = 1 \qquad (4)$$

egyenletrendszer megoldásaként. A (3) egyenletet az (1) összefüggés használatával a

$$c_k^i = \sum_{j=0}^{K} \sum_{m=0}^{M} \lambda_m^i T_{j,k}^m c_j^i \qquad k = 0, \dots K \qquad (5)$$

formában is írhatjuk.

Egy Markov-láncot akkor nevezünk irreducibilisnek, ha minden k, j osztályra és bármely t időpontra létezik olyan s, amelyre

$$\mathbf{P}(X_{t+s}^i = k \mid X_t^i = j) > 0 \qquad (6)$$

Tetszőleges átsorolási szabály nem feltétlenül eredményez irreducibilis Markov-láncot, amelyet a 4.2 fejezetben vizsgálunk részletesebben. A BM rendszerek esetén, ha a biztosított a legrosszabb osztályban van és legalább egy kár következik be, akkor (értelmes) átsorolási szabály esetén a biztosított ugyanebben az osztályban marad a következő időszakban. A BM rendszernek ez a tulajdonsága maga után vonja, hogy irreducibilis Markov-lánc aperiodikus lesz.

A BM rendszerek esetén jellemzően a stacionárius valószínűségek meghatározásával történik az optimalizálás (lásd például Heras et al. (2002), Lemaire (1995)).

4.2 Átsorolási szabályok optimalizálása

Első lépésként egyedül az átsorolási szabályok optimalizálását adjuk meg, ekkor π_k értékeket külső paraméternek tekintjük. Amikor az átsorolási szabályok és díjak együttes optimalizálását végezzük, akkor egy kiinduló (default) értéket adunk meg, amelyet a modellben módosítani lehet, tehát ezt az értéket csökkenthetjük vagy növelhetjük.

Az átsorolási szabályokat T_{jm} bináris változók segítségével írjuk le. A T_{jm} bináris változó 1 értéke azt jelöli, hogy a biztosított j osztályt „lép”, ha m kárt okoz. A j értéke bármilyen egész szám lehet, pozitív esetben a biztosított a BM rendszerben felfele lép, tehát javít a besorolásán. Amennyiben j negatív, akkor ront a besorolásán, tehát a rendszerben lefele lép a biztosított. A lehetséges lépések alsó és felső korlátját a $\underline{J}$ és $\overline{J}$ jelöli. Amennyiben $\overline{J} = K$, $\underline{J} = -K$; akkor semmilyen megkötés nincs az átsorolásnál.

Megtehetnénk, hogy a korábban bevezetett T^m mátrix minden eleméhez bevezetünk egy bináris változót, de ekkor a bináris változók magas száma nagymértékben növelné a modell futási idejét. A T_{jm} változók használatával kevesebb bináris változót vezetünk be, miközben továbbra is nagy szabadságunk marad az optimalizálásban.

A c_k^i változó a továbbiakban azt fogja jelölni, hogy a stacioner eloszlás esetén az i kockázati csoport tagja milyen valószínűséggel lesz a k-adik BM osztályban. A stacionaritást kvadratikus feltételek segítségével lehet megadni, ezek linearizálásához a d^i_{kjm} segédváltozókra lesz szükség.

A g^i_k változók szintén segédváltozók, a kockázati csoportok esetén az elméleti értéktől vett átlagos abszolút eltérés leírásához lesz szükség rájuk.

Első lépésként T_{jm} változókra szükséges korlátokat megadni, hogy valódi átsorolási szabályokat írjanak le. Nyilvánvalóan minden BM osztályhoz és okozott kárszámhoz egyértelmű átsorolási szabály tartozik:

$$\sum_{j=\underline{J}}^{\overline{J}} T_{jm} = 1 \ , \qquad \forall m. \tag{7}$$

Előírjuk, hogy kármentes esetben javuljon a BM besorolás:

$$\sum_{j=1}^{\overline{J}} T_{j0} = 1 \, . \tag{8}$$

Kár esetén általában romlani szokott a kárbesorolás, viszont elegendő csak a legnagyobb lehetséges kárra előírni, hogy romoljon a besorolás:

$$\sum_{j=\underline{J}}^{-1} T_{jM} = 1 \, . \tag{9}$$

Fontos továbbá előírni azt is, hogy magasabb kárszám esetén a besorolás rontásának mértéke is növekedjen:

$$\sum_{\ell=j}^{\overline{J}} T_{\ell m} \geq T_{j,m+1} \qquad \forall j, \ m = 0, ..., M-1 \, . \tag{10}$$

A (7), (8), (9) és (10) korlátok biztosítják számunkra, hogy a T_{jm} változókkal egy érvényes átsorolási szabályt kapjunk.

Következő lépésként meghatározzuk, hogy a T_{jm} változók által meghatározott átsorolási szabályhoz milyen stacionárius valószínűségek tartoznak. Először is minden típus 1 valószínűséggel tartózkodik a BM osztályok valamelyikében:

$$\sum_{k=0}^{K} c^i_k = 1 \qquad \forall i \ . \tag{11}$$

BM rendszerek esetén az új belépők valamelyik osztályban kezdenek, és azt, hogy a későbbiekben melyik BM osztályban tartózkodnak, az átsorolási szabályok határozzák meg. Egy adott BM osztály valószínűsége az idő előrehaladtával konvergál egy ún. stacioner eloszláshoz (lásd például Loimaranta (1972)). BM rendszerek vizsgálatakor a stacioner valószínűségeket veszik alapul (ahogy Heras et al. (2004) is), mi is ezt a megoldást követjük. Egy valószínűségeloszlást akkor nevezünk stacionáriusnak, ha átsorolás előtt és után nem változik a BM osztályokban tartózkodás valószínűsége:

$$c_k^i = \sum_{j=\max(\underline{J},-(K-k))}^{\min(\overline{J},k)} \sum_{m=0}^{M} \lambda_m^i T_{jm} c_{k-j}^i \qquad k = 1, ..., K-1, \quad \forall i \; . \tag{12}$$

Az összefüggés a 0 és K osztályokban eltérő, mivel ha például valaki a második BM osztályban tartózkodik, és kár esetén pl. 3 osztályt esik, akkor a nem létező -1-es BM osztályba kellene kerülnie. Ez természetesen nem lehetséges, ezért azok az átlépések, amelyek a 0-nál kisebb osztályba kerülést eredményeznének, a legrosszabb (0) osztályba kerülnek:

$$c_0^i = \sum_{j=\underline{J}}^{0} \sum_{m=0}^{M} \lambda_m^i T_{jm} c_{-j}^i \qquad \forall i \; . \tag{13}$$

Hasonló a helyzet a legjobb BM osztály esetén is:

$$c_K^i = \sum_{j=0}^{\overline{J}} \sum_{m=0}^{M} \lambda_m^i T_{jm} c_{K-j}^i \qquad \forall i \; . \tag{14}$$

A (12), (13) és (14) egyenletek biztosítják a valószínűségeloszlás stacionaritását, de ezek kvadratikus korlátok (T_{jm} és c_k^i döntési változók szorzata szerepel benne). Szerencsére újabb változók bevezetésével ezek a korlátok linearizálhatóak[2]. A

$$d_{kjm}^i \geq \lambda_m^i c_k^i - (1 - T_{jm}) \qquad \forall i, j, k, m \tag{15}$$

korlátok segítségével előírjuk, hogy ha T_{jm} változó értéke 1, azaz m kár esetén j osztályt változik a besorolás, akkor d_{kjm}^i változó értéke pozitív, egészen pontosan legalább $\lambda_m^i c_k^i$. Tehát a k BM osztályból az i típusú biztosítottak (legalább) $\lambda_m^i c_k^i$ aránya átkerül a $k + j$ osztályba (a legalsó, valamint a legfelső osztályt ismét külön fogjuk kezelni). Ha T_{jm} változó értéke 0, akkor d_{kjm}^i változó értéke lehet akár 0 is. Nekünk ennél több kell, mivel ha T_{jm} változó értéke 1, akkor d_{kjm}^i változó értékének pontosan $\lambda_m^i c_k^i$-nek kell lennie, különben pedig pontosan nullának. Ezt meg tudjuk tenni újabb korlátok hozzáadásával:

$$d_{kjm}^i \leq \lambda_m^i c_k^i \qquad \forall i, j, k, m \tag{16}$$

illetve

$$d_{kjm}^i \leq T_{jm} \qquad \forall i, j, k, m \; . \tag{17}$$

[2]Legyen T bináris változó és c pedig nemnegatív folytonos változó, és $c \leq M$. Ekkor Tc keresztszorzata helyettesíthető egy d változóval, $MT \geq d \geq c - (1 - T)M$ és $c \geq d$ korlátokkal. A mi esetünkben $c \leq 1 (= M)$. Bővebben lásd pl. Glover (1975), Adams és Forrester (2007)

Átsorolás után a c_k^i osztályban az „elemszám" (valószínűség) nem lesz más, mint a megfelelő d_{kjm} változó összege:

$$c_k^i = \sum_{j=\max(\underline{J},-(K-k))}^{\min(\overline{J},k)} \sum_{m=0}^{M} d_{k-j,j,m}^i \qquad k = 1,\dots,K-1, \forall i \ , \tag{18}$$

$$c_K^i = \sum_{j=0}^{\overline{J}} \sum_{\ell=0}^{j} \sum_{m=0}^{M} d_{K-\ell,j,m}^i \qquad \forall i \tag{19}$$

és

$$c_0^i = \sum_{j=\underline{J}}^{0} \sum_{\ell=j}^{0} \sum_{m=0}^{M} d_{-\ell,j,m}^i \qquad \forall i \ . \tag{20}$$

A (16) és (17) korlátok elhagyhatóak, ezek akkor is teljesülni fognak, ha nem írjuk elő külön őket. Intuitíve úgy lehet belátni, hogy a c_k^i változók összege (minden i-re) 1, tehát a d_{kjm}^i változók összege legalább 1, viszont 1-nél nem lehet több, mivel mindegyik d változót beszámítjuk valamelyik c változóba, és így a c változók összege 1-nél nagyobb lenne. Formálisan ezt az 1. állításban látjuk be.

1. Állítás. *A (7), (11), (15), (18), (19) és (20) korlátok esetén*

$$d_{kjm}^i = \begin{cases} \lambda_m^i c_k^i, & \text{ha } T_{jm} = 1; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy átsorolási szabályt. Ekkor:

$$1 = \sum_{k=0}^{K} c_k^i \geq \sum_{k=0}^{K} \sum_{m=0}^{M} \sum_{(j,m)|T_{jm}=1} d_{kjm}^i \geq \sum_{k=0}^{K} \left(\sum_{m=0}^{M} \lambda_m^i c_k^i \right) = \sum_{k=0}^{K} c_k^i = 1 \ ,$$

Tehát minden relációnak egyenlőség formájában kell teljesülnie. Ez egyben azt is jelenti, hogy ha $T_{jm} = 0$ akkor az összes d_{kjm}^i változó is 0 lesz. □

4.2.1 Irreducibilitás

A (7), (8), (9), (10), (11), (15), (18), (19) és (20) korlátok együttese megad minden átsorolási szabályhoz egy stacionárius valószínűségeloszlást, de nem minden átsorolási szabály eredményez *irreducibilis* Markov-láncot.

A Markov-lánc akkor irreducibilis, ha bármely tetszőleges osztályból kiindulva bármely osztályba pozitív valószínűséggel lehet jutni, véges időn belül. Tehát ebben az esetben minden osztály elérhető a stacionárius eloszlásban.

Nézzünk egy példát egy olyan átsorolási szabályra, ami nem irreducibilis Markov-láncot eredményez. Az egyszerűség kedvéért vegyünk egy 3 osztályból álló BM rendszert. Kár esetén két osztályt romlik a besorolás, kármentes esetben pedig kettőt javul. Ekkor a stacionárius valószínűségeloszlás esetén a középső osztály valószínűsége 0 lesz, mivel bármely osztályból indul a szerződő, ebbe az osztályba nem kerülhet.

A nem irreducibilis Markov-láncot eredményező átsorolási szabályok kizárását a legegyszerűbben úgy érhetjük el, hogy a c_k^i stacionárius valószínűségekre alsó korlátokat határozunk meg:

$$c_k^i \geq \tau \qquad \forall i, k \ , \tag{21}$$

ahol az alsó határ szükség esetén különbözhet osztályonként és típusonként.

A (21) egyenlőtlenség erősebb korlát az irreducibilitásnál, másképp fogalmazva, a (21) korlát biztosítja a Markov-lánc irreducibilitását, viszont nem minden irreducibilis Markov-lánc fog eleget tenni a (21) korlátnak. A közgazdasági megfontolás mégis emellett a korlát mellett szólhat. Ha van pl. egymillió ügyfél, akik közül csak 1 tartózkodik (várhatóan) egy adott BM osztályban, akkor ugyan irreducibilis lesz a rendszer, de igazából ez a BM osztály nincs kihasználva. Vagy engedjük meg, hogy senki ne legyen egy adott BM osztályban (=nem lesz irreducibilis a Markov-lánc), vagy írjuk elő, hogy a kockázatközösség „érzékelhető" része legyen ebben a BM osztályban, például minden osztályban az össz sokaság legalább 1%-a.

4.2.2 BM osztályok megszüntetése

Ha viszonylag kicsik a kárbekövetkezési valószínűségek és engedékeny az átsorolási szabály, akkor az alsó BM osztályokba nagyon kicsi valószínűséggel kerülnek az ügyfelek. Kérdés, hogy érdemes-e ezeket az osztályokat fenntartani. Másik oldalról, ha használjuk a (21) korlátokat, akkor lehet, hogy nagyon extrém átsorolási szabályt kapunk, mert csak így tudunk eleget tenni az irreducibilitás követelményének.

Ennek a problémának a megoldása lehet, ha megengedjük, hogy a BM osztályok száma csökkenjen. Ehhez minden osztályhoz bevezetünk egy V_k bináris változót. Amennyiben $V_k = 1$, akkor a k-adik osztályt bezárjuk, tehát az ügyfelek ebbe az osztályba nem kerülhetnek. Másképpen fogalmazva, ennek az osztálynak a stacionárius valószínűsége nulla ($c_k^i = 0$), tehát ebbe az osztályba kerülés valószínűségének is 0-nak kell lennie ($d_{kjm}^i = 0$, ami viszont következik a (16) korlátból).

Ahhoz, hogy az adott osztály bezáródjon, a következő korlátokat kell a modellhez hozzáadni:

$$c_k^i \leq 1 - V_k \qquad \forall i, k \, . \tag{22}$$

Ahhoz pedig, hogy legalább τ valószínűséggel legyenek az i típusú ügyfelek a nyitott osztályban, a (21) korlátokat a következőképpen kell módosítani:

$$c_k^i \geq \tau - V_k \qquad \forall i, k \, . \tag{23}$$

Az irreducibilitás megőrzése miatt a bezárásokat valamelyik szélső osztálytól kezdve, fokozatosan kell megvalósítani. A modell egyszerűbb leírása miatt csak arra az esetre írjuk fel a korlátokat, amikor kizárólag a felső osztálytól kezdve engedélyezett az osztályok bezárása. A 4.3 fejezetben bemutatunk egy módszert arra, hogyan tudjuk az átsorolási szabályokat és díjakat együttesen optimalizálni. Ebben az esetben, mivel a díjak is változtathatóak, teljesen mindegy, hogy felülről zárunk be két osztályt, vagy egyet-egyet felülről, illetve alulról. Amennyiben azonban a díjakat fixnek tekintjük, akkor már más eredményt kapunk, ha felülről és alulról zárunk be egy-egy osztályt, és nem felülről (vagy alulról) kettőt. Bár a leírásban egyedül azt az esetet írjuk le, amikor csak a felülről bezárás lehetséges, a modell könnyen átalakítható arra az esetre is, amikor a bezárás mindkét oldalról megvalósítható, vagy csak alulról.

Tehát, amennyiben kizárólag a felülről bezárás lehetséges, akkor szükségesek a

$$V_k \leq V_{k+1} \qquad k = 1, \ldots K \tag{24}$$

korlátok.

Ezen kívül a szélső osztályok bezárásával, az új szélső osztályra vonatkozó szabályokat is meg kell határozni. Például, amennyiben a K osztály bezárul, akkor a $K-1$ osztály lesz az új legfelső osztály, amire a (19) korlát kell, hogy teljesüljön. Másképpen: amennyiben $V_K = 1$, akkor a

$$c_k^i = \sum_{j=0}^{\overline{J}} \sum_{\ell=0}^{\min(j,k)} \sum_{m=0}^{M} d_{k-\ell,j,m}^i \qquad k = K-1, \ \forall i \ . \tag{25}$$

korlátnak kell teljesülnie, különben pedig az eddig használt (18) korlátnak. Ekkor tehát azokat a d_{kjm}^i változókat, amelyekhez tartozó lépésekkel nem létező osztályokba kerülnének a szerződők, a szélső osztály bezárása esetén az új szélső osztály korlátjába kell átvinni:

$$c_k^i + 1 - V_{k+1} + V_k \geq \sum_{j=0}^{\overline{J}} \sum_{\ell=0}^{\min(j,k)} \sum_{m=0}^{M} d_{k-\ell,j,m}^i \qquad k = 1, \ldots, K, \ \forall i \tag{26}$$

$$c_k^i - 1 + V_{k+1} \leq \sum_{j=0}^{\overline{J}} \sum_{\ell=0}^{\min(j,k)} \sum_{m=0}^{M} d_{k-\ell,j,m}^i \qquad k = 1, \ldots, K, \ \forall i \tag{27}$$

Ezek az egyenlőtlenségek tehát akkor teljesülnek egyenlőség formájában, ha $V_{k+1} = 1$ és $V_k = 0$.

A (18) összefüggés ,,középső” osztályok esetén érvényes, de nem tudjuk előre megmondani, hogy egy osztály ,,szélső” vagy ,,középső” lesz-e (a bezárások miatt), ezért ezeket a korlátokat is változtatni kell:

$$c_k^i + V_{k+1} \geq \sum_{j=\max(\underline{J},-(K-k))}^{\min(\overline{J},k)} \sum_{m=0}^{M} d_{k-j,j,m}^i \qquad k = 1, \ldots, K, \ \forall i \tag{28}$$

$$c_k^i - V_{k+1} \leq \sum_{j=\max(\underline{J},-(K-k))}^{\min(\overline{J},k)} \sum_{m=0}^{M} d_{k-j,j,m}^i \qquad k = 1, \ldots, K, \ \forall i \ , \tag{29}$$

Másképpen tehát akkor teljesül egyenlőség formájában a (18) korlát, ha $V_{k+1} = 0$, tehát az eggyel feljebb lévő osztály nincs bezárva.

4.2.3 Profitabilitási korlát és a célfüggvény meghatározása

Az átsorolási szabályt úgy kell meghatározni, hogy a biztosítótársaságnak ne eredményezzen várhatóan veszteséget. Tehát az összsokaság várható díja legyen legalább akkora, mint az összes várható kár:

$$\sum_{i=1}^{I} \psi^i \sum_{k=0}^{K} \pi_k c_k^i \geq \sum_{i=1}^{I} \psi^i \lambda^i \tag{30}$$

ahol a π_k az osztályok előre rögzített díjai és λ^i az i-edik típus várható kárszáma.

Hátramaradt a célfüggvény meghatározása. Ideális esetben minden típus, minden esetben (minden BM osztályban) a kockázatának megfelelő díjat fizeti; tehát a díjnak minden típus esetén az összes osztályban pontosan λ^i-nek kellene lennie.

Azonban mivel a BM rendszerben több kockázati típus van, akikre ugyanazok a π_k díjak vonatkoznak, ezért az ideális állapotot nem lehet elérni. Az optimalizálás során a célunk, hogy ehhez az ideális állapothoz minél közelebb kerüljünk. Egyetlen kérdés maradt hátra, egy konkrét átsorolási szabály esetén mennyire vagyunk messze az ideális állapottól. Több megfontolás is ismert.

Hasonló BM modellek esetén, (lásd pl. Heras et al. (2004)), sokszor azt a célt tűzik ki, hogy a csoportok *várható* díjfizetése minél közelebb legyen a várható kárához. A csoportok várható kára külső paraméter λ^i, a várható díjfizetés pedig könnyen kalkulálható: $\sum_{k=0}^{K} \pi_k c_k^i$. A kettő közötti különbségre bevezethető g^i nemnegatív folytonos döntési változó. Ekkor:

$$\sum_{k=0}^{K} \pi_k c_k^i + g^i \geq \lambda^i \tag{31}$$

és

$$\sum_{k=0}^{K} \pi_k c_k^i - g^i \leq \lambda^i \tag{32}$$

A célfüggvény pedig a g döntési változók súlyozott összege:

$$\sum_{i=1}^{I} \beta^i g^i \tag{33}$$

Amennyiben a súlyoknak a $\beta^i = \psi^i$ értékeket adjuk meg, akkor a csoportokat a kockázatközösségen belüli arányával súlyozzuk, de akár használhatóak másmilyen súlyok is, attól függően, hogy a csoportokat milyen arányban szeretnénk figyelembe venni.

A vegyes egészértékű programozási feladat: szeretnénk (33) kifejezést minimalizálni a (7)–(11), (15), (18)–(20), valamint (30)–(32) feltételek mellett (esetleg szerepeltetve (21) korlátokat is). Ha engedélyezett a BM osztályok bezárása, akkor (18) és (19) korlátokat kicseréljük (26)–(29) korlátokra, valamint hozzáadjuk a modellhez a (22)–(24) korlátokat.

A (33) kifejezés azonban nem veszi kellőképpen figyelembe a biztosítottak kockázatkerülését. Amennyiben a díjak változtatását is engedélyezzük (lásd 4.3 fejezet), akkor könnyen kaphatunk olyan optimális megoldást, ahol a célfüggvény értéke 0, viszont a BM kategóriák díjai között nagy eltérések alakulnak ki, a legkisebb és legnagyobb osztályok díja között akár 1 000 000-szoros is lehet a különbség. Ez nyilván nem egy megfelelő díjvektor, ezért a díjak különbségére valamilyen korlátot szoktak meghatározni: pl. nem lehet nagyobb 20%-nál a különbség két szomszédos BM osztály díja között (lásd pl. Heras et al. (2004)). Mi ezt a megoldást azonban ad-hoc-nak érezzük. Egyszerűbb lenne a célfüggvényben jobban figyelembe venni a biztosított kockázatelutasítását.

Másik megoldás, hogy nem a *várható* díjfizetést nézzük, hanem az elméleti értéktől vett várható eltérésnégyzetet minimalizáljuk (lásd pl. Loimaranta (1972)). Lineáris programozás esetén egyszerűbb, ha az eltérésnégyzet helyett az abszolút eltérést tekintjük (lásd pl. Heras et al. (2004)). Ehhez a g^i változókat osztályok szerint is „szétbontottuk". Tehát a g^i_k jelenti az i típusú biztosítottakra vonatkozó eltérést a k BM osztály esetén, egészen pontosan ennek valószínűséggel súlyozott értékét:

$$\pi_k c^i_k + g^i_k \geq \lambda^i c^i_k \qquad \forall i, k\,, \tag{34}$$

$$\pi_k c^i_k - g^i_k \leq \lambda^i c^i_k \qquad \forall i, k\,. \tag{35}$$

A célfüggvény (33) kifejezése helyett tehát a

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{k=0}^{K} \beta^i g^i_k \tag{36}$$

célfüggvényre alakítottuk a modellt. A (36) esetén nem szükséges külön előírásokat tenni a a BM osztályok díjaira, üzletileg elfogadható díjakat fogunk kapni.

4.3 Átsorolási szabályok és díjak együttes optimalizálása

Amennyiben szeretnénk az átsorolási szabályok mellett a díjakat is optimalizálni, akkor a π_k paraméterek helyett folytonos nemnegatív változókat kellene használni. A modellben többször is szerepel a stacioner valószínűségek és a díjak szorzata (lásd például (30) korlát és (34), (35) korlátok), így π_k változók bevezetésével kvadratikus modellt kapnánk.

Azonban, ha kiindulunk valamilyen díjvektorból, és a változás mértékét kategorizáljuk, kikerülhetjük a kvadratikus kifejezések használatát. A díjvektorokban a legkisebb változás mértékét jelölje ε. Jelölje O^ℓ_k bináris változó azt, hogy a k BM kategória esetén $2^\ell\varepsilon$ értékkel (a 2^ℓ kifejezésben ℓ kitevő és nem felső index) növekszik a díj, $\ell = 0, 1, 2, \ldots, L$. Mivel a BM kategóriák díjai nem nőhetnek bármilyen határon túlra, az L paraméter értékét könnyen meg lehet határozni a gyakorlati feladatok során. Hasonló módon bevezethetnénk $O_k^{-\ell}$ bináris változókat, amik azt jelölik, hogy a BM kategóriák díjai $2^\ell\varepsilon$ értékkel csökkennek. Erre azonban nincs szükség, jelölje inkább O_k^- azt, hogy a BM kategória díja $2^{L+1}\varepsilon$ értékkel csökken. Így elérhetjük, hogy a díj változtatása a $-(2^{L+1})\varepsilon$, $(2^{L+1}-1)\varepsilon$ értékek között tetszőleges legyen. Ezen túlmenően előírhatjuk (ha szükséges), hogy a BM kategóriák díjai nemnegatívok legyenek, valamint azt, hogy magasabb BM osztály esetén a díj ne legyen nagyobb.

$$\pi_k - 2^{L+1}\varepsilon O_k^- + \sum_{\ell=0}^{L} 2^\ell \varepsilon O_k^\ell \geq 0 \qquad \forall k \tag{37}$$

$$\pi_k - 2^{L+1}\varepsilon O_k^- + \sum_{\ell=0}^{L} 2^\ell \varepsilon O_k^\ell \geq \pi_{k+1} - 2^{L+1}\varepsilon O_{k+1}^- + \sum_{\ell=0}^{L} 2^\ell \varepsilon O_{k+1}^\ell \qquad (k=0,\dots K-1)\,. \tag{38}$$

Az O_k^ℓ változók bevezetésével módosítani kell a (30), (34) és (35) korlátokat. Ehhez további változók bevezetése szükséges. Amennyiben O_k^ℓ változó értéke 1, akkor $o_k^{\ell i}$ folytonos döntési változó értéke legyen $2^\ell\varepsilon c_k^i$; amennyiben O_k^ℓ változó értéke 0, akkor $o_k^{\ell i}$ változó is legyen 0. Ezeket a feltételeket teljesíteni tudjuk a következő korlátokkal:

$$o_k^{\ell i} \geq 2^\ell \varepsilon c_k^i - 2^\ell \varepsilon (1 - O_k^\ell) \qquad \forall \ell, i, k\,, \tag{39}$$

$$o_k^{\ell i} \leq 2^\ell \varepsilon c_k^i \qquad \forall \ell, i, k\,, \tag{40}$$

és

$$o_k^{\ell i} \leq 2^\ell \varepsilon O_k^\ell \qquad \forall \ell, i, k\ , \tag{41}$$

és természetesen analóg módon: $o_k^{-i} \geq 2^{L+1}\varepsilon c_k^i - 2^{L+1}(1-O_k^-)$ és $o_k^{-i} \leq 2^{L+1}\varepsilon c_k^i$ továbbá $o_k^{-i} \leq 2^{L+1}\varepsilon O_k^-$. A bevezetett $o_k^{\ell i}$ változókkal fel tudjuk írni a profitabilitási korlátot:

$$\sum_{i=1}^{I} \psi^i \sum_{k=0}^{K} \left[\pi_k c_k^i - o_k^{-i} + \sum_{\ell=0}^{L} o_k^{\ell i}\right] \geq \sum_{i=1}^{I} \psi^i \lambda^i\,. \tag{42}$$

A (34) és (35) korlátokat is meg kell változtatnunk hasonló logika mentén:

$$\pi_k c_k^i - o_k^{-i} + \sum_{\ell=0}^{L} o_k^{\ell i} + g_k^i \geq \lambda^i c_k^i \qquad \forall i, k\,, \tag{43}$$

$$\pi_k c_k^i - o_k^{-i} + \sum_{\ell=0}^{L} o_k^{\ell i} - g_k^i \leq \lambda^i c_k^i \qquad \forall i, k\,. \tag{44}$$

A vegyes egészértékű modell: szeretnénk (36) kifejezést minimalizálni (7)–(11), (15), (18)–(20), valamint (37)–(44) feltételek mellett (esetleg szerepeltetve (21) korlátokat is). Ha engedélyezett a BM osztályok bezárása, akkor (18) és (19) korlátokat kicseréljük (26)–(29) korlátokra, valamint hozzávesszük a modellhez a (22)–(24) korlátokat.

Ekkor eljutottunk egy olyan vegyes egészértékű modellhez, amelyben sok bináris változó van, és ezekhez sok ,,nagy M" korlát tartozik. Ezek a modellek numerikusan nem viselkednek jól (lásd például Lodi (2010)). A bináris változók száma csökkenthető, amennyiben az O döntési változók helyett az osztályok díjainak változtatását nem egyenként, hanem valamilyen szabály szerint több osztályt együtt véve engedélyezzük. Ilyen változtatás lehet például, ha bevezetünk P^ℓ bináris döntési változókat, ami ha felveszi az 1 értéket, akkor minden BM osztály díja $2^\ell\varepsilon$ mértékkel növekedik. Ugyanígy bevezethető az ilyen jellegű csökkentés is, a P^- változó segítségével. Az ilyen jellegű változtatás esetén $L+1$ bináris változót adunk a modellhez.

Valamint bevezethetünk R^ℓ típusú döntési változókat is, ami a díjvektor szélein tesz lehetővé nagyobb változtatásokat. Ehhez olyan H darab R_H^ℓ bináris változókat vezetünk be, amelyek pozitív értéke esetén a 0-adik osztály és a H, $H-1$, ... 0-adik osztály között növeljük a díjakat, $2^\ell\varepsilon$ értékekkel. Tehát másképpen a BM rendszer alsó osztályainak díjait fokozatosan emelhetjük ezekkel a változókkal. Hasonlóan bevezethetünk a felső osztályokra is ilyen R típusú változtatásokat, illetve ugyanígy a díjakat is csökkenthetjük.

Bevezethetünk továbbá Q^ℓ döntési változókat is, amikkel a díjvektor ,,tekerését" tesszük lehetővé. Ekkor a díjakat a $Q^\ell=1$ esetén $(\frac{K}{2}-k)2^\ell\varepsilon$ értékkel változtatjuk. Azaz ebben az esetben az alsóbb osztályokban a díjakat növeljük, a magasabbakban pedig csökkentjük. Ugyanígy a változtatás irányát is megváltoztatjuk, tehát ekkor a díjakat $(k-\frac{K}{2})2^\ell\varepsilon$ értékkel kell változtatni. Így tehát az alacsony kategóriákban a díj csökken, a magas BM osztályokban pedig nő.

A P, Q és R bináris változók együttes használatával elérhetjük hogy a díjvektor kellően rugalmasan változhat, a modell mégis futtatható reális időkeretben.

5 Numerikus eredmények

A numerikus számításokat egy 64-bites Windows 10 operációs rendszerrel rendelkező, 16 Gb-os, AMD FX6300-as processzoros asztali számítógépen végeztük. Optimalizálási szoftverként a Gurobi 8.0.0 verzióját használtuk, amelyhez tartozó programunkat Python 3.6 nyelven írtuk meg.

Az első néhány vizsgálatunk során feltettük, hogy egy időszak alatt legfeljebb 1 kár következhet be ($M=1$). A célfüggvényben a g változók súlyainak a típusok arányát használtuk ($\forall i : \beta^i = \psi^i$).

Első modellünkben egy kevésbé kockázatosabb, $\lambda^1 = 10\%$-os paraméterrel és egy kockázatosabb, $\lambda^2 = 20\%$-os paraméterrel rendelkező típust vettünk figyelembe, mind a kettőt ugyanolyan aránnyal ($\psi^1 = \psi^2 = 50\%$).

A modell megoldása esetén három különböző díjvektort használtunk, amelyek a *2. táblázatban* láthatóak (%-ban megadva).

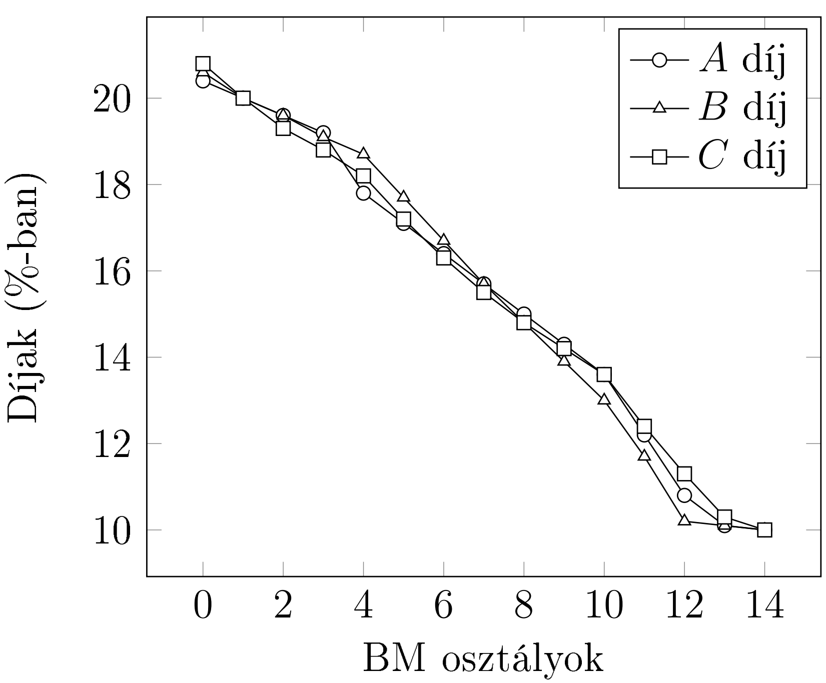
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
π_A	18,5	18	17,5	17	16,5	16	15,5	15	14,5	14	13,5	13	12,5	12	11,5
π_B	21,3	20,2	19,3	18,3	17,4	16,6	15,8	15	14,3	13,6	12,9	12,3	11,7	11,1	10,6
π_C	25,7	23,8	22	20,4	18,9	17,5	16,2	15	13,9	12,9	11,9	11,0	10,2	9,5	8,8

2. táblázat. Az A, B, C típusú díjak

Az A típusú díjvektor lineáris, a B és C ezzel szemben nem lineáris. A π_C díjvektor esetén a legnagyobb az eltérés a legalacsonyabb-, illetve legmagasabb díj között, míg a π_A esetén a legkisebb. Mindhárom típusú díjvektor esetén a 7-edik osztály díja egyezik meg az átlagos kárvalószínűséggel.

Az osztályokban a szerződők legalább $\tau = 0{,}1\%$-ának kell lennie, először a futtatásainkból a díjváltoztatás lehetőségét kihagytuk.

Az A és B típusú díjak esetén az optimális szabály az *(1,-7)* lett, tehát kármentes esetben egy osztályt javítanak a biztosítottak, kár esetén pedig 7 osztállyal romlik a besorolásuk. A π_C díj esetén az átsorolási szabály kevésbé lett szigorú, kár okozása ekkor 5 osztály rontását eredményezte. Az A, B típusú díjak esetében egyik osztály sem záródott be, azonban a π_C díjvektornál az osztályok optimális száma 13 lett, tehát a 13-as és 14-es osztály bezárult. A π_C díjvektor esetén a bezárás azért szükséges, mivel a magasabb osztályokban lévő díjak a másik két díjtípushoz képest sokkal alacsonyabbak, ezért ekkor bezárás nélkül a (30) korlát sérülne, míg a π_A, π_B díjak esetén ez a korlát bezárás nélkül is teljesülhet.



1. ábra. A P, Q, R díjváltoztatással kapott díjvektorok

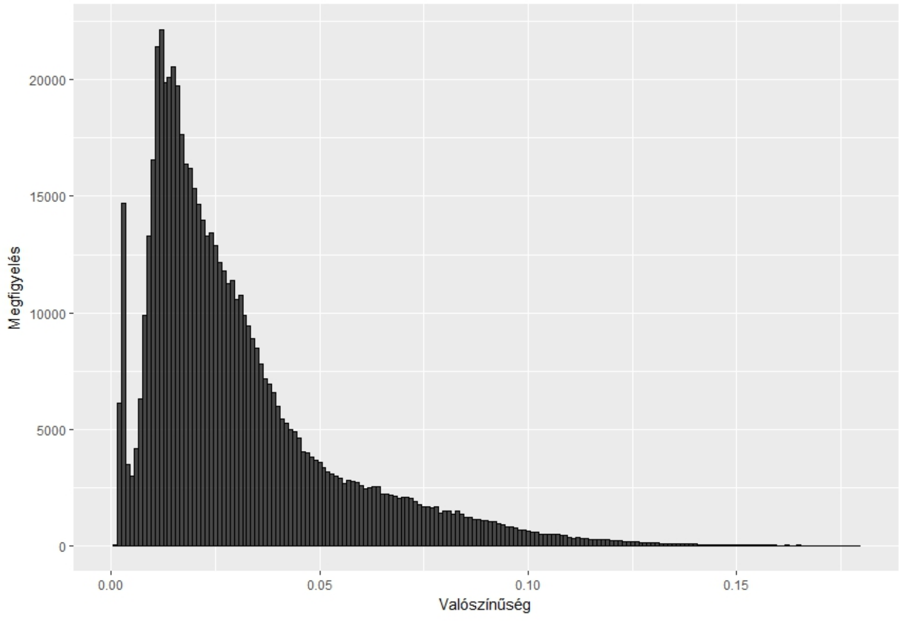
A továbbiakban a díjváltoztatást is lehetővé tettük. Ehhez az $L = 3$, illetve $\varepsilon = 0{,}1\%$-os értékeket használtuk. Mindegyik díj esetén két típusú modellt futtattunk, az egyikben kizárólag O típusú díjváltoztatásokat engedtünk meg, a másik esetén pedig P, Q, R típusúakat. Az O típusú díjváltoztatásokkal 1 óra alatt nem talált optimális megoldást a program, egyik típusú induló díjvektorra sem, míg a P, Q, R típusú díjváltoztatások esetén az optimális megoldást kevesebb, mint 12 perc alatt tudtuk meghatározni. Az A díj esetén 680 másodperc, a B-nél 231, míg a C esetén csupán 88 másodperc.

Ekkor az optimális szabály mind a három esetben *(1,-6)* lett, az optimális díjvektorok pedig az *1. ábrán* láthatóak. Az optimális díj (nagyjából) azonos mind a három esetben, függetlenül attól, hogy mi volt a kiinduló díjvektor.

5.1 Realisztikus modell

A bevezető példa után egy sokkal realisztikusabb modell eredményét is szeretnénk bemutatni. A kérdés, hogy milyen paraméterű (és hány) típust érdemes használni. Rendelkezésünkre álltak egy magyarországi biztosító KGFB adatai a 2008 és 2009 évekre. Logisztikus regresszióval becsültük meg a károkozás valószínűségét minden szerződésre, a becsült valószínűségek hisztogramja a *2. ábrán* látható.

A hisztogram megalkotásánál ismertek voltak a biztosítottak paraméterei, tehát igazából nem antiszelekciós modellről van szó. A hisztogram megalkotásánál nem az volt a célunk, hogy az antiszelekciót vizsgáljuk, hanem hogy reális valószínűségeket társítsunk a típusokhoz.



2. ábra. Becsült károkozási valószínűségek eloszlása

Típus száma	Aránya az összsokaságban (ψ^i)	Várható kárszám (λ^i)
1	11%	1,8%
2	44%	2,7%
3	26%	3,2%
4	11%	4,1%
5	7%	5,0%

3. táblázat. A létrehozott típusok paraméterei

A 2. ábra alapján 5 kockázati csoportot hoztunk létre (a csoportok létrehozása nem egyértelmű, más csoportosítás is számba jöhetett volna, de a végeredmény érdemben nem változik). A létrehozott csoportok (típusok) főbb mutatói a *3. táblázatban* találhatóak.

Az LP modellben az egy időszak alatt bekövetkezhető legnagyobb kárszámnak kettőt határoztunk meg ($M = 2$), a kárszám pedig Poisson-eloszlást követ (a kettőnél több kár valószínűségét a kettő kárszámhoz adtuk hozzá, de esetünkben ez elenyésző valószínűség).

A BM rendszer induló díjainak minden osztályban az átlagos kárvalószínűséget határoztuk meg, azaz $\pi_k = 3{,}08\%$. A díjváltoztatáshoz a P, Q, R típusú díjváltoztatásokat használtuk ($\varepsilon = 0{,}001$) és hasonlóan a korábbi példához $L = 3$ paraméter értékkel számoltunk; az R típusú díjváltoztatás esetén az öt szélső osztályt vettük figyelembe, mind a két oldalon ($H = 5$). Mivel az induló díjvektor ebben az esetben ,,vízszintes", ezért a Q változók esetén csak azt az irányú ,,tekerést" engedélyeztük, amikor az alsóbb osztályokban növekedhet, míg felső kategóriákban csökkenhet a díj. Hasonlóan az R típusú változtatások esetén a díjvektor alsó osztályai esetén csak növelést engedélyeztük, míg a felső osztályokban egyedül csak a díjak csökkentését. Az osztályok számát $K + 1 = 20$-ra állítottuk, a bezáráshoz a $\tau = 0{,}001$ értéket használtuk.

Ekkor az optimális megoldás meghatározására közel 14 órára volt szükség. Az optimális megoldásban egyik osztály sem zárult be, az átsorolási szabály szerint kármentes esetben a biztosítottak 1 osztályt lépnek felfele, az első kár esetén pedig 14-et lefele, két vagy több kár bekövetkezése mellett pedig egyből a legrosszabb, 0-adik osztályba kerülnek. Ebben az esetben több osztálynak is ugyanazt a díját kaptuk az optimális megoldásban. A 0-3 osztály esetén a díj 0,0325 lett, a 4-edik osztályé 0,0315, míg az összes többi kategóriában a díj 0,0305 lett.

Tehát lényegében egy három osztályt tartalmazó BM rendszer lett az optimális, amelyben legalább 15 év kármentesség esetén az első kár okozása után a díj nem növekszik. Amennyiben 14 időszakkal korábban történt utoljára kár, akkor újabb kár okozása esetén a díj kis mértékben növekszik, míg ha 14 évnél korábban történt az előző kár, akkor egyből a legmagasabb díjat fizeti a biztosított. A legkisebb díj elérését, bármely osztályból kiindulva legfeljebb 5 kármentes év után érhetik el a szerződők.

Összehasonlításképpen, ennek az átsorolási szabálynak a stacionárius valószínűségeivel kiszámoltuk a Heras et al. (2004) LP modelljének az optimális díjvektorát is. Az eredeti a modellen annyit változtatunk, hogy figyelembe vettük a biztosított kockázatkerülését, tehát a várható kár és várható kifizetés abszolút eltéréseit ebben az esetben is osztályonként külön vettük figyelembe. Ezen kívül a modellhez egy (30) típusú korlátot is hozzáadtunk. Tehát következő modellt oldottuk meg:

$$
\begin{array}{lrlll}
\min & \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=0}^{K}\psi^i g_k^i & & & \\
s.t. & & & & \\
 & c_k^i\pi_k + g_k^i & \geq \lambda^i c_k^i, & & \forall i,k \\
 & c_k^i\pi_k - g_k^i & \leq \lambda^i c_k^i, & & \forall i,k \\
 & \pi_{k+1} & \leq \pi_k, & & k=0,\dots,K-1 \\
 & \sum_{i=1}^{I}\psi^i\sum_{k=0}^{K}c_k^i\pi_k & \geq \sum_{i=1}^{I}\psi^i\lambda^i & & \\
 & & \forall g_k^i,\pi_k \geq 0 & &
\end{array}
$$

A c_k^i stacionárius valószínűségek most paraméterek (ellentétben az általunk bemutatott modellel), és a π_k díjak pedig nemnegatív folytonos változók.

Ekkor olyan díjvektort kaptunk, amely esetén a 19-es osztály díja *0,296* lett, míg az összes többi osztályban pedig *0,032*. Tehát ebben az esetben is a MILP modellhez hasonló, lépcsős jellegű díjvektort kaptunk, a MILP modell esetében 3 különböző díjú osztállyal, míg az LP esetén kettővel.

A célfüggvény értéke a MILP esetében *0,0058691*-lett, míg az LP esetében ennél nem sokkal kevesebb, *0,0057368*. Ez a viszonylag alacsony eltérés magyarázható azzal, hogy míg a Heras et al. (2004) LP modelljében a díjak változtatása folytonosan lehetséges, addig a MILP modellben ezt csak a megadott ε értékek segítségével tehetjük meg. Tehát megfelelően alacsonyan kiválasztott ε és elég sok P, Q, R típusú bináris változó esetén a MILP modell célfüggvényértéke közelebb kerülhet az LP modelléhez, de ez a változtatás a modell futásidejének növekedését eredményezné.

Annak ellenére, hogy a kapott átsorolási szabály szigorúnak tűnik, a végső stacionárius valószínűségek viszonylag hasonlóak a különböző típusokra, a konkrét értékek a *4. táblázatban* találhatóak (a helytakarékosság miatt nem adtuk meg minden osztályra a valószínűségeket, csak néhányra, de ezek alapján is jól látszanak a tendenciák).

Bár a célfüggvény meghatározásánál az átlagos abszolút eltérést minimalizáltuk, hasznos információ, ha megadjuk típusonként a MILP modell díjai esetén a várható díjfizetést, ez szerepel az *5. táblázatban.*

Típus	BM kategória					
	0	1	5	12	18	19
$\lambda^1 = 1{,}8\%$	0,0033	0,0035	0,0175	0,0154	0,0139	0,7628
$\lambda^2 = 2{,}7\%$	0,0074	0,0077	0,0256	0,0212	0,0180	0,6579
$\lambda^3 = 3{,}2\%$	0,0102	0,0106	0,0298	0,0238	0,0196	0,6043
$\lambda^4 = 4{,}1\%$	0,0162	0,0166	0,0368	0,0276	0,0216	0,5161
$\lambda^5 = 5{,}0\%$	0,0233	0,0234	0,0431	0,0303	0,0225	0,4385

4. táblázat. Stacionárius valószínűségek típusok esetén

$\lambda^1 = 1{,}8\%$	$\lambda^2 = 2{,}7\%$	$\lambda^3 = 3{,}2\%$	$\lambda^4 = 4{,}1\%$	$\lambda^5 = 5{,}0\%$
0,03053	0,03057	0,0306	0,03065	0,03071

5. táblázat. Díjfizetés várható mértéke típusonként

Az 5. táblázat adatai szerint a díjfizetés várható mértéke emelkedik ugyan a kockázat növekedésével, de a növekedés mértéke elenyésző. Ha szükséges, el tudnánk érni, hogy a várható díjfizetés jobban igazodjon a tényleges kockázathoz, de ezt csak azon az áron tudjuk megtenni, hogy jelentősen megnövekszik a díj ingadozása BM kategóriánként, amivel szélső esetben a biztosítás értelme (kockázatcsökkentés) veszik el. Ha szükséges, a célfüggvényben két szempontot (várható díjfizetés hozzáigazítása a tényleges kockázathoz, illetve a díjfizetés ingadozásának kontrollálása) egyszerre is figyelembe vehetjük, ekkor a célfüggvény a (33) és (36) kifejezések lineáris kombinációja lesz.

A valós adatok elemzése kapcsán a másik fontos megjegyzésünk, hogy az optimális átsorolási szabály lényegesen szigorúbb a magyar gyakorlatnál. Az 1. táblázat adatai alapján kijelenthető, hogy a magyar rendszer viszonylag enyhén bünteti a károkozást. Érdemes lenne elgondolkodni a szabály szigorításán.

5.2 Nagy kockázatú csoportok

Az 5.1 fejezetben bemutatott modell végeredménye abból a szempontból negatív lett, hogy a BM rendszer nem igazán tudta szelektálni a típusokat. A negatív eredmény hátterében az áll, hogy a kárbekövetkezési valószínűségek kicsik. Pár év kártapasztalata alapján kell eldönteni, hogy a károkozás valószínűsége pl. 1,8% vagy 2,7%, ami nem tűnik igazán reális feladatnak, mivel ezt csak nagy hibával tudjuk megtenni. Ezért egy olyan modellt is megnéztünk, ahol nagyobb károkozási valószínűségek szerepelnek. Ebben az esetben a végeredmény sokkal kedvezőbb lett.

A társadalomban öt azonos méretű csoport van, rendre $10\%, 20\%, 30\%$, 40%, valamint 50% kárbekövetkezési valószínűséggel. A többi paraméteren nem változtattunk, ugyanaz maradt, mint az 5.1 fejezetben.

Ekkor átsorolási szabálynak az (1, -3, -8)-at kaptuk, a modell futásideje pedig 46 óra volt. A díjvektorra pedig ismét lépcsőzetes eredmény született: a 0 kategória díja *0,46*, az 1–4 osztályoké *0,4*, a 5–14 kategóriáké *0,3*, a 15–19 osztályoké pedig *0,14*. Fontos észrevétel, hogy a legjobb díj *0,14*, míg a legrosszabb *0,46*, tehát a legjobb típusnak (0,1-es paraméterrel) biztosan magasabb díjat kell fizetnie, mint az általa okozott várható kár. Ezzel szemben a legrosszabb típusnak (akik várható kára 0,5) pedig biztosan kevesebbet kell fizetnie, mint a tényleges kockázata. Tehát a BM rendszerben biztosan lesz keresztfinanszírozás.

A csoportok várható díjfizetései a *6. táblázatban* láthatóak, a MILP sorban. Kiszámoltuk, hogy a kapott átsorolási szabályok esetén mi az optimális díjvektor, ezekkel számolt várható díjfizetés szerepel a Heras-LP sorban.

	$\lambda^1 = 0{,}1$	$\lambda^2 = 0{,}2$	$\lambda^3 = 0{,}3$	$\lambda^4 = 0{,}4$	$\lambda^5 = 0{,}5$
MILP	0,1535	0,2249	0,3319	0,3842	0,4059
Heras-LP	0,1373	0,2183	0,3350	0,3931	0,4163

6. táblázat. Várható díjfizetések nagy kárvalószínűségi modell esetén

Látható, hogy ebben az esetben a BM rendszer sokkal jobban szelektálja a típusokat, nagyobb mértékben különböznek a BM kategóriák díjai is, és a várható díjfizetés is jobban igazodik a tényleges kockázathoz. A típusok között ugyan van keresztfinanszírozás, de az antiszelekció közgazdasági irodalmának ismeretében ezen nem is lepődünk meg.

6 Összefoglalás

A tanulmányban egy olyan vegyes egészértékű lineáris programozási modellt definiáltunk, amelyben egy adott BM rendszerben egyszerre optimalizálhatjuk az átsorolási szabályokat, a díjakat és a BM osztályok számát. A modellben a célfüggvény eltér a szokásostól: jellemzően azt tűzik ki célul, hogy a típusok várható díjfizetése megegyezzen a tényleges kockázattal. Ez az elvárás könnyűszerrel teljesíthető, de csak azon az áron, hogy a BM osztályok díjában akár több nagyságrendnyi különbség mutatkozik. Mi az elméleti értéktől vett átlagos abszolút eltérést minimalizáltuk, ami a biztosított kockázatelutasítását jobban figyelembe veszi.

A bemutatott elméleti keretet több feltételezés mellett numerikusan is teszteltük. A futási idő jelentős is lehet, de a BM rendszerek kalibrációja jellemzően évente történik, ezért a futási idők tolerálhatóak.

A numerikus példa eredményeit értelmezve megállapítható, hogy relatíve nagy károkozási valószínűséggel rendelkező csoportokat a BM rendszer megfelelően szelektál. Kis kárvalószínűségű csoportok esetén a különböző típusok várható díjfizetése közel azonos (cserébe a díjak ingadozása kicsi). Az eredmények másik tanulsága, hogy az optimális átsorolási szabály jellemzően szigorúbb, mint a magyar gyakorlat (káronként 2 BM kategóriát esik a biztosított). A kárbekövetkezési valószínűségek jellemzően kicsik, a magyar KGFB rendszerben a biztosítottak többsége a bónusz 10 osztályban van. Ez azt is jelenti, hogy érezhetően különböző kockázatú egyének ugyanazt a várható díjat fizetik, a rendszer nem eléggé hatékonyan szelektál. Valamivel jobb szelektálás elérhető lenne, ha erősebben büntetnénk a károkozást.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők ezúton szeretnék kifejezni hálájukat a két ismeretlen lektornak értékes észrevételeikért, megjegyzéseikért. Szeretnénk továbbá megköszönni Kovács Lászlónak is a hasznos tanácsait.

Irodalom

1. Abbring, J. H., Chiappori, P-A. és Zavadil, T. (2008). *Better Safe than Sorry? Ex Ante and Ex Post Moral Hazard in Dynamic Insurance Data.* Tinbergen Institute Discussion Paper No. 08-075/3 CentER Discussion Paper No. 2008–77.
2. Adams, W. P. és Forrester, R. J. (2007). Linear forms of nonlinear expressions: New insights on old ideas. *Operations Research Letters,* 35, 510–518.
3. Arató M. és Martinek L. (2014). Estimation of claim numbers in automobile insurance. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Sectio computatorica,* 42, 19–35.
4. Bolton, P. és Dewatripont, M. (2005) *Contract theory*, MIT Press
5. Bonsdorff, H. (1992). On the Convergence Rate of Bonus-Malus Systems. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA,* 22(2), 217–223.
6. Brouhns, N., Guillén, M., Denuit, M. és Pinquet J. (2003). Bonus-Malus Scales in Segmented Tariffs With Stochastic Migration Between Segments. *The Journal of Risk and Insurance,* 70(4), 577–599.
7. Chiappori, P. és Salanié, B. (2000). Testing for Asymmetric Information in Insurance Markets.*Journal of Political Economy,* 108(1), 56–78.
8. Cooper, R. és Hayes B. (1987). Multi-period Insurance Contracts, *International Journal of Industrial Organization,* 5, 211–231.
9. Crocker, K. J., és Snow, A. (1986). The Efficiency Effects of Categorical Discrimination in the Insurance Industry. *Journal of Political Economy,* 94(2), 321–344
10. Crocker, K. J., és Snow, A. (2000). The Theory of Risk Classification. In Dionne, G. (szerk.) *Handbook of Insurance,* Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London.
11. Dahlby, B. G. (1983). Adverse selection and statistical discrimination: An analysis of Canadian automobile insurance. *Journal of Public Economics,* 20(1), 121–130.
12. Denuit M., Maréchal X., Pitrebois S. és Walhin J.-F. (2007), *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*, Wiley, New York.
13. Denuit, D. és Dhaene, J. (2001). Bonus-Malus scales using exponential loss functions. *Bl tter der DGVFM,* 21(1), 13–27.
14. De Prill, N. (1978). The Efficiency of a Bonus-Malus System *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA,* 10(1), 59–72.
15. De Prill, N. (1979). Optimal Claim Decisions for a Bonus-Malus System: a Continuous Approach. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA,* 10(2), 215–222.
16. Dionne, G., Gouriéroux, C. és Vanasse, C. (1997). *The Informational Content of Household Decisions, with an Application to Insurance under Adverse Selection,* Discussion Paper no. 9701. Paris: Centre de Recherche en Économie et Statistique.
17. Dionne, G., Michaud, P-C. és Dahchour M. (2013). Separating Moral Hazard from Adverse Selection and Learning in Automobile Insurance: Longitudinal Evidence from France. *Journal of the European Economic Association,* 11(4), 897–917.

18. Eppen, G. és Fama, E. (1968). Solutions for Cash Balance and Simple Dynamic Portfolio Problems. *The Journal of Business,* 41(1), 94–112.

19. de Ghellinck, G. T. és Eppen, G. D. (1967). Linear Programming Solutions for Separable Markovian Decision Problems. *Management Science, Series A, Sciences,* 13(5), 371–394.

20. Glover, F. (1975). Improved linear integer programming formulations of nonlinear integer problems. *Management Science,* 22(4), 455–460.

21. Gyetvai M. és Ágoston K. Cs. (2018). Optimization of transition rules in a Bonus-Malus system. *Electronic Notes in Discrete Mathematics,* 69, 5–12.

22. Heras, A. T., Vilar, J. L., és Gil, J. A. (2002). Asymptotic Fairness of Bonus-Malus Systems and Optimal Scales of Premiums. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory,* 27(1), 61–82.

23. Heras, A. T., Gil, J. A, García-Pineda, P. és Vilar, J. L. (2004). An Application of Linear Programming to Bonus Malus System Design. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA,* 34(2), 435–456.

24. Holton, J. (2001). Optimal Insurance Coverage under Bonus-Malus Contracts. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA,* 31(1), 175–186.

25. Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M.(2001). *Modern Actuarial Risk Theory Using R,* Springer.

26. Kiss, D. (2016). A magyarországi bónusz-malusz rendszer modellezése. Szakdolgozat: Budapesti Corvinus Egyetem.

27. Lee, B. J. és Kim, D. H. (2016). Moral Hazard in Insurance Claiming from a Korean Natural Experiment. *The Geneva Papers on Risk and Insurance – Issues and Practice,* 41(3), 455–467.

28. Lemaire, J. (1995). *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance,* Kluwer Academic Publisher, Boston

29. Lodi, A. (2010). Mixed integer programming computation. In: Jünger, M., Liebling, T. M., Naddef, D., Nemhauser, G. L., Pulleyblank, W. R., Reinelt, G., Rinaldi, G., Wolsey, L. A. (eds.) *50 Years of Integer Programming 1958–2008,* Springer, Berlin, 619–645.

30. Loimaranta, K. (1972). Some asymptotic properties of bonus systems. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA,* 6(3), 233–245.

31. Mert, M. és Saykan, Y. (2005). On a bonus-malus system where the claim frequency distribution is geometric and the claim severity distribution is Pareto. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 34, 75–81.

32. Molnar, D. E. és Rockwell, T. H. (1966). Analysis of Policy Movement in a Merit-Rating Program: An Application of Markov Processes. *The Journal of Risk and Insurance,* 33(2), 265–276.

33. Payandeh, A. T. és Sakizadeh, M. (2017). Designing an Optimal Bonus-Malus System Using the Number of Reported Claims, Steady-State Distribution, and Mixture Claim Size Distribution.*arXiv:1701.05441*, 1–29.

34. Puelz, R. és Snow, A. (1994). Evidence on Adverse Selection: Equilibrium Signaling and Cross Subsidization in the Insurance Market. *Journal of Public Economics,* 102(2), 236–257.

35. Rothschild, M. és Stiglitz, J.(1976). Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information. *The Quarterly Journal of Economics,* 90(4), 629–649.

36. Shavell, S. (1979). On moral hazard and insurance. *The Quarterly Journal of Economics,* 93, 541–562.
37. Sundt, B. (1989). Bonus hunger and credibility estimators with geometric weights. *Insurance: Mathematics and Economics,* 8(2), 119–126.
38. Vanderbroek, M. (1993). Bonus-malus system or partial coverage to oppose moral hazard problems? *Insurance: Mathematics and Economics,* 13, 1–5.
39. Vukina, T. és Nestić, D. (2015). Do people drive safer when accidents are more expensive: Testing for moral hazard in experience rating schemes. *Transportation Research Part A,* 71, 46–58.

OPTIMISATION OF TRANSITION RULES IN BONUS-MALUS SYSTEMS

The Bonus-malus (BM) system is a risk management method in actuarial science, the application of which is recommended when an insurance company assumes there are some unobservable parameters, that affect the risk of each policyholder. It means the policyholders can be categorized into risk-groups, however, the insurance company is unable to perfectly classify each policyholder into the predefined risk-groups through the observable parameters (such as age, sex, education, etc). Therefore, there remains an error of this classification, that means there are some underlying unobservable parameters, that affect the risks of the policyholders. According to the corresponding literature, this causes welfare loss in the insurance market. Estimating these parameters is not a straightforward task with statistical methods, however, with multi-period contracts, the insurer can make a more precise estimation of the overall risk for each policyholder. The Bonus-malus system is a classification scheme for multi-period contracts.

In a Bonus-malus system, there are a finite number of classes, where the policyholders are assigned in each period. Each class has a different premium, which means the payment of the policyholders depends on the class they are assigned into. At the start of the contract, each policyholder is assigned into the 'initial class'. Subsequently, if the policyholder has a claim in the next period, he/she moves to a worse class, so the payment of the policyholder will increase in the following period. However, if he/she does not have a claim in the period, then he/she moves to a better class, therefore his/her payment will be lower in the subsequent period. The reclassification between the periods in the Bonus-malus system is set by the so-called transition rules. The transition rules define how many classes should the policyholders decrease in the following period if they cause claims. Additionally, there should be a no-claim transition rule, which would increase the policyholder's class in the subsequent period. The most notable application of the BM systems is in the field of automobile third-party liability insurances. Designing a BM system requires choosing the transition rules between the classes and their number, the scale of premiums and the initial class. If the insurance company would know each policyholder's true risks, then each risk-groups' premium would be equal to their expected claim. Hence, the purpose of the optimisation is to find the best possible BM system, that approximate this 'ideal situation' as closely as possible. Nevertheless, it is impossible to design a BM system, that eliminates the welfare loss, thus we would like to minimize the difference from the 'ideal situation'. To minimize this difference, we can set 'good' premium scales and 'good' transition rules. The first possibility is widely studied in actuarial literature, however, there is less emphasis on the second one.

In this article, we introduced a MILP model for the optimization of the transition

rules. In the literature of the Bonus-malus systems, using LP (or MILP) technic is relatively uncommon. Only one known LP model exists for the optimisation of the premiums, introduced by Heras et al.(2004). We adopted the assumptions that were applied in that model. In this MILP model, for finding the optimal transition rules, we assign binary variables to each possible transition rule. In this model, the premiums are external parameters, however, the model can be modified into the joint optimisation of transition rules and premiums. In this joint optimisation, we set initial premiums as external parameters, that we can increase or decrease with binary variables in the optimisation process. Furthermore, we introduce another modification of the model, where we can jointly optimise the number of classes as well. In the optimisation of the number of classes, we fix the initial number of classes and assign to each class a binary variable. If this binary variable is equal to one, then we close the class, which means that we reduce the number of classes by one. In the model, we assume there are different risk-groups among the insurance company's policyholders. We know the number, the ratio and expected number of claims of each risk-group.

In practice of the BM systems, transition rules are based only on the number of claims, and the claim amount is ignored. The reason for this ignorance is that the risk-groups can be distinguished more accurately by the number of claims than the (conditional) claim amount. We operate with the same assumption in the MILP model, therefore we only consider the number of claims. For the sake of simplicity, we assume the claim amount is equal for each type of policyholders. Also, we assume the expected claim amounts of the risk-groups do not change over time. In most of the corresponding literature, the optimisation of the BM systems is based on the Loimaranta-elasticity (Loimaranta(1972)). The elasticity shows that if the risk increases by 1%, then how it will affect the expected payment. The elasticity is a practical indicator for optimizing a system where the purpose is the higher-risk policyholders should have a higher expected payment. Although the elasticity does not reflect the risk aversion of the policyholders. That means in any BM system, the variance of the premiums should not be excessively high. Hence in the MILP model, we adopt an objective function, that considers the risk-aversion of the policyholders.

An essential requirement is the financial balance of the BM system. In the long run, it is inadequate to operate a BM system, that cause loss for the insurance company. Each model, that uses the Lomaintra-elasticity for the optimisation, ensures some kind of financial balance. However, the objective function of our model requires the usage of a profitability constraint in the BM system.

In this article, we present some numerical experiments of this MILP model for some smaller sized scenarios. Furthermore, we used data from a Hungarian insurance company, to construct a more realistic scenario. In this case-study, we found a stricter optimal transition rule than the one currently applied in the BM system of the Hungarian automobile third-party liability insurance. Moreover, we examined a less realistic case as well. Overall the BM system works better if the differences between the risk-groups' claim-probabilities are higher.